IVIQ zagonetačko natjecanje
Matematička sezona 2

Zadatak 1.
Odredi razlomak čiji su brojnik i nazivnik prirodni brojevi manji od 100, koji najbolje aproksimira broj $\sqrt{2}$.

Zadatak 2.
Ako su svi koeficijenti u rastavu binoma $(a+b)^n$ neparni, dokaži da je $n = 2^s - 1$, i obratno.

Zadatak 3.
Reći ćemo da broj N ima svojstvo $P(k)$ ako se on može prikazati kao umnožak k uzastopnih prirodnih brojeva većih od 1.

a) Nađi k za kojeg neki broj N posjeduje svojstva $P(k)$ i $P(k+2)$.

b) Dokaži da ne postoji broj koji bi imao svojstva $P(2)$ i $P(4)$.

Zadatak 4.
Neka su α i β realni korijeni kvadratnih polinoma s cjelobrojnim koeficijentima. Dokaži da je $\alpha+\beta$ korijen nekog polinoma s cjelobrojnim koeficijentima stupnja ne većeg od 4.

Zadatak 5.
Riješi sustav

$$\cos x_1 = x_2, \cos x_2 = x_3, \ldots, \cos x_n = x_1 .$$

Zadatak 6.
Možemo li u ravnini položiti beskonačno mnogo krugova takvih da svaki pravac siječe najviše dva kruga?

Zadatak 7.
Ako su a, b, c, d stranice četverokuta koji je i tetivan i tangencijalan, dokaži da njegova površina iznosi

$$P = \sqrt{abcd} .$$

Zadatak 8.
Iz svakog vrha konveksnog poliedra M izlaze 3 vrha. Poznato je da je svaka njegova strana mnogokut oko kojeg se može opisati kružnica. Dokaži da se oko tog poliedra može opisati sfera.

Zadatak 9.
Središta triju međusobno disjunktnih krugova leže na jednom pravcu. Ako postoji kružnica koja dira sve te krugove, dokaži da je njen polumjer veći od polumjera barem jednog od njih.

Zadatak 10.

Zadan je konačan skup točaka u ravnini, tako da svaka ima cjelobrojne koordinate. Da li je moguće obojiti neke točke tog skupa crvenom, a sve preostale bijelom bojom, tako da za svaki pravac L paralelan s bilo kojom od koordinatnih osi, razlika između broja bijelih i crvenih točaka na L bude -1, 0 ili 1? Obrazloži odgovor.